МЕХАНИКА
MECHANICS

УДК 539.3 https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-3-265-270

Контактная задача для двухслойного цилиндра*

Д. А. Пожарский[1], Н. Б. Золотов[2], И. Е. Семенов[3], Е. Д. Пожарская[4], М. И. Чебаков[5]**
[1,3,4] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2,5] Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Contact problem for a two-layered cylinder ***

D. A. Pozharskii[1], N. B. Zolotov[2], I. Ye. Semenov[3], E. D. Pozharskaya[4], M. I. Chebakov[5]**
[1,2,4] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[2,5] Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Введение. Актуальность исследования контактных задач для цилиндрических тел обусловлена необходимостью проведения инженерных расчетов на контактную прочность валов, стержней и трубопроводов. В настоящей работе изучается новая контактная задача статической теории упругости о взаимодействии жесткого бандажа с бесконечным двухслойным цилиндром, состоящим из внутреннего сплошного и внешнего полого цилиндров, между которыми выполняются условия гладкого контакта. Наружный цилиндрический бандаж посажен с натягом и имеет конечную длину. При помощи интегрального преобразования Фурье задача сводится к интегральному уравнению относительно неизвестного контактного давления.

Материалы и методы. Рассматриваются разные комбинации линейно-упругих материалов составного цилиндра. Исследуется асимптотика функции-символа ядра интегрального уравнения в нуле и бесконечности, играющая важную роль для использования аналитических методов решения. Для решения интегрального уравнения вводится основной безразмерный геометрический параметр и применяется сингулярный асимптотический метод.

Результаты исследования. В соответствии со свойствами функции-символа предложена специальная легко факторизуемая аппроксимация этой функции, пригодная в широком диапазоне изменения параметров задачи. При помощи метода Монте-Карло рассчитаны параметры этой аппроксимации. Получены асимптотические формулы как для контактных давлений, так и для их интегральной характеристики. Расчеты сделаны для разных материалов и относительных толщин цилиндрического слоя, в том числе для тонкостенных слоев.

Обсуждение и заключения. Полученные асимптотические решения эффективны для относительно широких бандажей, когда размер области контакта превышает диаметр составного цилиндра. Важно, что используемый метод остается применимым и для случаев, когда внешний ци-

Introduction. The investigation of the contact problems for cylindrical bodies is urgent due to the engineering contact strength analysis on shafts, cores and pipe-lines. In the present paper, a new contact problem of elastostatics on the interaction between a rigid band and an infinite two-layered cylinder, which consists of an internal continuous cylinder and an outer hollow one, with a frictionless contact between the cylinders, is studied. The outer cylindrical band of finite length is press fitted. By using a Fourier integral transformation, the problem is reduced to an integral equation with respect to the unknown contact pressure.

Materials and Methods. Different combinations of linearly elastic materials of the composite cylinder are considered. Asymptotics of the symbol function of the integral equation kernel at zero and infinity is analyzed. This plays an important role for the application of the analytical solution methods. A key dimensionless geometric parameter is introduced, and a singular asymptotic technique is employed to solve the integral equation.

Research Results. On the basis of the symbol function properties, a special easily factorable approximation being applicable in a wide variation range of the problem parameters is suggested. The Monte-Carlo method is used to determine the approximation parameters. The asymptotic formulas are derived both for the contact pressure, and for its integral characteristic. Calculations are made for different materials and for various relative thickness of the cylindrical layer including thin-walled layers.

Discussion and Conclusions. The asymptotic solutions are effective for relatively wide bands when the contact zone length is bigger than the diameter of the composite cylinder. It is significant that the method is applicable also for those cases

* Работа выполнена по гранту РФФИ 18-01-00017.
** E-mail: pozharda@rambler.ru, zolotov.nikita.borisovich@gmail.com, ivan.sk6@gmail.com, pozharskaya.elizaveta@rambler.ru, chebakov@math.sfedu.ru
*** The research is supported by the RFBR Grant 18-01-00017.

линдрический слой можно рассматривать как цилиндрическую оболочку. Асимптотические решения можно рекомендовать инженерам для анализа контактной прочности упругих деталей цилиндрической формы с упругим покрытием из другого материала.

when the outer cylindrical layer is treated as a cylindrical shell. The asymptotic solutions can be recommended to engineers for the contact strength analysis of the elastic barrels with a flexible coating of another material.

Ключевые слова: теория упругости, контактные задачи, составной цилиндр, аппроксимация, асимптотика.

Keywords: elasticity theory, contact problems, composite cylinder, approximation, asymptotics.

Образец для цитирования: Пожарский, А. Д. Контактная задача для двухслойного цилиндра / Д. А. Пожарский [и др]. — Вестник Донского гос. техн. ун-та. — 2018. — Т.18, №3. — С. 265−270. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-3-265-270

For citation: D.A. Pozharskii, N.B. Zolotov, I.Ye. Semenov, E.D. Pozharskaya, M.I. Chebakov zulko. Contact problem for a two-layered cylinder. Vestnik of DSTU, 2018, vol. 18, no.3, pp. 265−270. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-3-265-270

Введение. Динамическая контактная задача для преднапряженного упругого цилиндра, наполненного жидкостью, изучалась в работе [1]. Статические контактные задачи для однородных упругих тел цилиндрической формы рассматривались в работах [2–6] при помощи регулярного и сингулярного асимптотических методов. Было установлено [4], что для цилиндрических тел символы ядер интегральных уравнений контактных задач характеризуются более сложным асимптотическим поведением в нуле и бесконечности, чем, например, в контактных задачах для упругой полосы. Это потребовало применения усложненных аппроксимаций этих символов легко факторизуемыми функциями при использовании сингулярного асимптотического метода. Особенно усложняется аппроксимация для полых тонкостенных цилиндров [6]. Предложенная аппроксимация [6] эффективна даже для случаев, когда тонкостенный упругий цилиндр можно рассматривать как цилиндрическую оболочку [7]. Исследовалась контактная задача о взаимодействии упругого кольца с упругим цилиндром [8]. Износ упругого цилиндра анализировался в работе [9]. Цель настоящего исследования — получить решение контактной задачи для составного двухслойного упругого цилиндра на основе сингулярного асимптотического метода и эффективной аппроксимации символа ядра интегрального уравнения.

Материалы и методы. В цилиндрических координатах r, z (при осевой симметрии) рассмотрим бесконечный упругий составной цилиндр внешнего радиуса R, который состоит из внутреннего сплошного цилиндра радиуса $R_1<R$ с упругими параметрами ν_1, G_1 (коэффициент Пуассона и модуль сдвига) и внешнего цилиндрического слоя с упругими параметрами ν, G. Между слоем и внутренним цилиндром выполняются условия скользящей заделки. Рассмотрим контактную задачу о взаимодействии описанного составного цилиндра с жестким бандажом по области $|z|\le a$. При заданном натяге бандажа δ требуется определить контактные давления

$$\sigma_r = -q(z) \quad (|z| \le a).$$

Используя интегральное преобразование Фурье для решения собственно смешанной (контактной) краевой задачи для уравнений Ламе упругого равновесия и вводя безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$\lambda = \frac{R}{a}, \quad \delta' = \frac{\delta}{a}, \quad \zeta' = \frac{z}{a}, \quad q'(\zeta') = \frac{q(\zeta)(1-\nu)}{G}, \quad \varepsilon = \frac{G_1}{G}, \quad k = \frac{R_1}{R} < 1\,, \tag{1}$$

получим следующее интегральное уравнение относительно $q(\zeta)$:

$$\int_{-1}^{1} q(\xi) k\left(\frac{\zeta-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi\delta \quad (|\zeta| \le 1), \qquad k(t) = \int_0^\infty L(u)\cos(ut)\,du, \tag{2}$$

где символ ядра имеет вид

$$L(u) = -\frac{d_1}{d} I_1 - \frac{d_2}{d} K_1, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} d = {} & (A_{55}A_{66} - A_{56}A_{65})[(A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32})(A_{23}A_{44} - A_{24}A_{43}) - \\ & - A_{13}A_{31}(A_{22}A_{44} - A_{24}A_{42}) + A_{14}A_{31}(A_{22}A_{43} - A_{23}A_{42}) + \\ & + A_{13}A_{32}(A_{21}A_{44} - A_{24}A_{41}) - A_{14}A_{32}(A_{21}A_{43} - A_{23}A_{41})] + \\ & + A_{35}A_{56}[(A_{23}A_{44} - A_{24}A_{43})(A_{12}A_{61} - A_{11}A_{62}) + \\ & + (A_{22}A_{44} - A_{24}A_{42})(A_{11}A_{63} - A_{13}A_{61}) + (A_{22}A_{43} - A_{23}A_{42})(A_{14}A_{61} - A_{11}A_{64}) + \\ & + (A_{21}A_{44} - A_{24}A_{41})(A_{13}A_{62} - A_{12}A_{63}) + (A_{21}A_{43} - A_{23}A_{41})(A_{12}A_{64} - A_{14}A_{62}) + \\ & + (A_{21}A_{42} - A_{22}A_{41})(A_{14}A_{63} - A_{13}A_{64})], \end{aligned}$$

$$d_1 = (A_{13}A_{44} - A_{14}A_{43})[A_{32}(A_{56}A_{65} - A_{55}A_{66}) - A_{35}A_{56}A_{62}] - \\ -A_{35}A_{56}[A_{12}(A_{43}A_{64} - A_{44}A_{63}) - A_{42}(A_{13}A_{64} - A_{14}A_{63})],$$

$$d_2 = -(A_{13}A_{44} - A_{14}A_{43})[A_{31}(A_{56}A_{65} - A_{55}A_{66}) - A_{35}A_{56}A_{61}] + \\ +A_{35}A_{56}[A_{11}(A_{43}A_{64} - A_{44}A_{63}) - A_{41}(A_{13}A_{64} - A_{14}A_{63})],$$

$$A_{11} = uI_0 - 2(1-\nu)I_1, \quad A_{12} = -uK_0 - 2(1-\nu)K_1, \quad A_{13} = uI_1, \quad A_{14} = -uK_1,$$

$$A_{21} = (3-2\nu)uI_0 - (u^2 + 4(1-\nu))I_1, \quad A_{22} = -(3-2\nu)uK_0 - (u^2 + 4(1-\nu))K_1,$$

$$A_{23} = u(I_1 - uI_0), \quad A_{24} = -u(K_1 + uK_0),$$

$$A_{31} = 2(1-\nu)I_1^*, \quad A_{32} = 2(1-\nu)K_1^*, \quad A_{35} = -4(1-\nu_1)I_1^*,$$

$$A_{41} = ukI_0^* - 2(1-\nu)I_1^*, \quad A_{42} = -ukK_0^* - 2(1-\nu)K_1^*, \quad A_{43} = uI_1^*, \quad A_{44} = -uK_1^*,$$

$$A_{55} = ukI_0^* - 2(1-\nu_1)I_1^*, \quad A_{56} = uI_1^*,$$

$$A_{61} = (3-2\nu)uI_0^* - (u^2k + 4(1-\nu)k^{-1})I_1^*,$$

$$A_{62} = -(3-2\nu)uK_0^* - (u^2k + 4(1-\nu)k^{-1})K_1^*,$$

$$A_{63} = uk^{-1}I_1^* - u^2I_0^*, \quad A_{64} = -uk^{-1}K_1^* - u^2K_0^*,$$

$$A_{65} = -\varepsilon[(3-2\nu_1)uI_0^* - (u^2k + 4(1-\nu_1)k^{-1})I_1^*], \quad A_{66} = -\varepsilon u(I_1^*k^{-1} - uI_0^*),$$

$$I_n = I_n(u), \quad K_n = K_n(u), \quad I_n^* = I_n(uk), \quad K_n^* = K_n(uk), \quad n = 0,\ 1.$$

Здесь $I_n(u)$, $K_n(u)$ — модифицированные функции Бесселя. Безразмерный параметр λ характеризует относительную ширину области контакта.

Функция $L(u)$ в нуле и бесконечности ведет себя следующим образом:

$$\lim_{u\to 0} L(u) = L(0) = \frac{(\nu-1)(1+\varepsilon-\nu_1+\varepsilon\nu_1) + k^2\varepsilon_1}{2(\nu-1)[(\nu+1)(1+\varepsilon-\nu_1+\varepsilon\nu_1) + k^2\varepsilon_1]},$$
$$\varepsilon_1 = (\nu+1)(\nu_1-1) - \varepsilon(\nu-1)(\nu_1+1). \tag{4}$$
$$L(u) = \frac{1}{u} + \frac{D}{u^2} + o(u^{-2}) \quad (u \to +\infty), \quad D = 1-2\nu.$$

При k=0 значение $L(0)$ совпадает с известным для однородного сплошного цилиндра [4].

Для решения уравнения (2) применим сингулярный асимптотический метод [3,4], эффективный при достаточно малых значениях λ. С целью применения метода Винера–Хопфа [10] использовалась легко факторизуемая аппроксимация функции $L(u)$ (3) выражением

$$L^*(u) = \frac{\sqrt{u^2+B^2}}{u^2+C^2}\exp\left(\frac{D}{\sqrt{u^2+10^4}}\right)\frac{u^2+A^2G^2}{u^2+G^2}, \quad C^2 = \frac{A^2B}{L(0)}\exp\left(\frac{D}{10^2}\right). \tag{5}$$

При расчетах брали два случая: 1) железо внутри, цинк снаружи (ε=2,126, ν=0,27, ν_1=0,28); 2) алюминий внутри, цинк снаружи (ε=0,779, ν=0,27, ν_1=0,34). В таблице 1 даны значения параметров аппроксимации (5), ее относительная погрешность на действительной оси θ (%), рассчитанные при использовании метода Монте-Карло при разных относительных толщинах внешнего слоя k.

Таблица 1

Параметры аппроксимации

k	A	B	G	θ	A	B	G	θ
	Железо внутри цинка				Алюминий внутри цинка			
0,10	1,230	1,549	4,638	2,5	0,451	6,113	3,394	3
0,30	1,291	1,563	4,042	2,5	0,888	5,977	3,029	3
0,50	1,296	1,851	5,006	3,0	2,399	1,467	2,524	5
0,70	1,258	2,057	6,376	3,0	0,720	7,945	2,512	7
0,90	1,024	4,360	92,381	5,0	1,481	9,890	9,369	5
0,99	3,540	24,178	5,347	7,0	1,178	5,535	235,946	10

Поскольку, как следует из (4),

$$\lim_{k\to 1} L(0) = \frac{1-\nu_1}{2\varepsilon(1-\nu)(1+\nu_1)}, \qquad (6)$$

то в случае малых ε аппроксимация, рассчитываемая по формуле (5), для тонких внешних слоев должна усложняться путем увеличения числа входящих в нее параметров.

Результаты исследования. В результате применения метода Винера–Хопфа главный член асимптотического решения интегрального уравнения (2) при малых λ можно построить в форме

$$q(\zeta) = \frac{\delta}{\lambda}\left[\omega\left(\frac{1+\zeta}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-\zeta}{\lambda}\right) - \frac{1}{L(0)}\right] \quad (|x| \le 1), \qquad (7)$$

$$\omega(s) = \frac{W(s)+I(s)}{\sqrt{L(0)}}, \quad I(s) = -\frac{D}{\pi}\int_0^s W(s-\tau)K_0(10^2\tau)d\tau,$$

$$W(s) = \frac{\exp(-Bs)}{\sqrt{\pi s}} + \frac{C}{\sqrt{B}}\operatorname{erf}(\sqrt{Bs}) + \left(\frac{1}{A}-1\right)Q(AG,s),$$

$$Q(F,s) = \frac{F-C}{\sqrt{B-F}}\exp(-Fs)\operatorname{erf}(\sqrt{(B-F)s}) + \frac{C}{\sqrt{B}}\operatorname{erf}(\sqrt{Bs}).$$

Здесь erf(x) — интеграл вероятностей.

Для интегральной характеристики решения

$$P = \int_{-1}^{1} q(\zeta)d\zeta \qquad (8)$$

на основании формул (7) получим выражение

$$\frac{P}{\delta} = \frac{2}{\sqrt{L(0)}}\left[Z\left(\frac{2}{\lambda}\right) + J\left(\frac{2}{\lambda}\right)\right] - \frac{2}{\lambda L(0)}, \quad J(s) = -\frac{D}{\pi}\int_0^s Z(s-\tau)K_0(10^2\tau)d\tau, \qquad (9)$$

$$Z(s) = \frac{C}{\sqrt{B}}\left[\left(s - \frac{1}{2B} + \frac{1}{C}\right)\operatorname{erf}(\sqrt{Bs}) + \sqrt{\frac{s}{\pi B}}\exp(-Bs)\right] + \left(\frac{1}{A}-1\right)T(AG,s),$$

$$T(F,s) = \frac{C}{\sqrt{B}}\left[\left(s - \frac{1}{2B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{F}\right)\operatorname{erf}(\sqrt{Bs}) + \sqrt{\frac{s}{\pi B}}\exp(-Bs)\right] -$$

$$-\left(1-\frac{C}{F}\right)\frac{\exp(-Fs)}{\sqrt{B-F}}\operatorname{erf}(\sqrt{(B-F)s}).$$

Как показывают расчеты, погрешность асимптотик (7), (9) при $\lambda<1$ не превышает $(5+\theta)\%$, где θ — погрешность аппроксимации (5).

В таблице 2 приведены значения интегральной характеристики $P\delta^{-1}$, рассчитанные по формулам (9) при разных значениях k и λ.

Таблица 2

Значения $P\delta^{-1}$

λ=	2	1	0,5	0,25	2	1	0,5	0,25
k	Железо внутри цинка				Алюминий внутри цинка			
0,10	3,25	5,77	10,9	21,1	3,22	5,71	10,8	20,9
0,30	3,37	6,02	11,4	22,2	3,20	5,65	10,7	20,7
0,50	3,67	6,65	12,7	24,8	3,09	5,51	10,5	20,4
0,70	4,22	7,78	15,0	29,4	2,96	5,33	10,2	19,9
0,90	5,60	10,3	19,6	38,2	2,93	5,28	9,99	19,4
0,99	6,91	12,3	23,2	44,9	2,99	5,31	9,94	19,2

Заключение. Как видно из таблицы 2, с уменьшением λ интегральная характеристика контактных давлений возрастает, что связано с увеличением площади области контакта. Для случая более прочного материала внутри цинка (железа) контактные давления больше, чем для алюминия внутри цинка. С утончением слоя цинка вокруг железа (при возрастании k) контактные давления существенно возрастают. При утончении слоя цинка вокруг алюминия этого не наблюдается, поскольку модуль продольной упругости (а также модуль

сдвига) у алюминия немного меньше, чем у цинка. Найденные асимптотики можно рекомендовать инженерам для анализа контактных прочностных характеристик деталей цилиндрической формы с покрытием.

Библиографический список

1. Belyankova, T. I. The dynamic contact problem for a prestressed cylindrical tube filled with a fluid / T.I. Belyankova, V.V. Kalinchuk // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2009. — Vol. 73, No. 2.— P. 209–219. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.04.011.

2. Александров, В. М. Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. — Москва : Машиностроение, 1986. — 176 с.

3. Aizikovich, S.M. The axisymmetric contact problem of the indentation of a conical punch into a half-space with a coating inhomogeneous in depth / S.M. Aizikovich, A.S. Vasil'ev, S.S. Volkov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2015. — Vol. 79, No. 5. — P. 500–505. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.03.011.

4. Krenev, L.I. Indentation of a functionally graded coating on an elastic substrate by a shpero-conical indenter / L.I. Krenev, E.V. Sadyrin, S.M. Aizikovich, T.I. Zubar / Springer Proceedings in Physics. — 2017. — Vol. 193. — P. 397–405. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-56062-5_33.

5. Пожарский, Д. А. К одной задаче Белоконя А. В. / Д. А. Пожарский, Н. Б. Золотов // Вестник Донского гос. техн. ун-та. — 2017. — Т. 17, № 2. — С. 7–11. DOI: https://doi.org/10.23947/1992-5980-2017-17-2-7-11 .

6. Золотов, Н. Б. К контактным задачам для цилиндра / Н. Б. Золотов, Д. А. Пожарский, Е. Д. Пожарская // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2017. — № 2. — С. 12–14. DOI: https://doi.org/10.23683/0321-3005-2017-2-12-14.

7. Григолюк, Э. И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. — Москва : Машиностроение, 1980. — 411 с.

8. Arutyunyan, N.Kh. On the contact interaction of an elastic ring with an elastic cylinder / N.Kh. Arutyunyan // Mechanics of Solids. — 1994. — Vol. 29, No. 2. — P. 194–197.

9. Goriacheva, I. G. Contact problem in the presence of wear for a piston ring inserted into cylinder / I.G. Goriacheva // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1980. — Vol. 44, No. 2. — P. 255–257.

10. Нобл, Б. Метод Винера-Хопфа / Б. Нобл. — Москва : Изд-во иностранной литературы, 1962. — 276 с.

Поступила в редакцию 29.01.2018
Сдана в редакцию 30.01.2018
Запланирована в номер 21.06.2018

Received 29.01 .2018
Submitted 30.01.2018
Scheduled in the issue 21.06.2018

Об авторах:

Пожарский Дмитрий Александрович,
заведующий кафедрой «Прикладная математика» Донского государственного технического университета (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор физико-математических наук, профессор,
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6372-1866
pozharda@rambler.ru

Золотов Никита Борисович,
магистрант Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (РФ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а),
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2193-0616
zolotov.nikita.borisovich@gmail.com

Authors:

Pozharskii, Dmitry A.,
Head of the Applied Mathematics Department, Don State Technical University (1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, RF), Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor,
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6372-1866
pozharda@rambler.ru

Zolotov, Nikita B.,
graduate student, Vorovich Institute for Mathematics, Mechanics, and Computer Science, Southern Federal University (8-a, ul. Milchakova, Rostov-on-Don, 344090, RF),
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2193-0616
zolotov.nikita.borisovich@gmail.com

Семенов Иван Евгеньевич,
студент кафедры «Прикладная математика» Донского государственного технического университета (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1)
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9247-0055
ivan.sk6@gmail.com

Пожарская Елизавета Дмитриевна,
студентка кафедры «Прикладная математика» Донского государственного технического университета (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1),
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5745-6135
pozharskaya.elizaveta@rambler.ru

Чебаков Михаил Иванович,
главный научный сотрудник Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета (РФ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а), доктор физико-математических наук, профессор,
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2075-1760
chebakov@math.sfedu.ru

Semenov, Ivan E.,
student of the Applied Mathematics Department, Don State Technical University (1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, RF),
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9247-0055
ivan.sk6@gmail.com

Pozharskaya, Elizaveta D.,
student of the Applied Mathematics Department, Don State Technical University (1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, RF),
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5745-6135
pozharskaya.elizaveta@rambler.ru

Chebakov, Mikhail I.,
Chief Research Scholar, Vorovich Institute for Mathematics, Mechanics, and Computer Science, Southern Federal University (8-a, ul. Milchakova, Rostov-on-Don, 344090, RF), Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor,
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2075-1760
chebakov@math.sfedu.ru